Nom :
Prénom :

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER	L3 PHYSIQUE FONDAMENTALE

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2008–2009

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Interrogation n° 2 (*durée 45 mn*)

Problème 1

On considère un système de moment cinétique $L = 1$. Une base de son espace des états est constituée des vecteurs propres de L_z : $(|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle)$ correspondant aux valeurs propres respectives $\hbar$, 0 et $-\hbar$. On rappelle d'autre part que $L_\pm = L_x \pm iL_y$.

1. Écrire le résultat de l'application de L_+ aux trois vecteurs de base.

$$\begin{aligned} L_+|+1\rangle &= \\ L_+|0\rangle &= \\ L_+|-1\rangle &= \end{aligned}$$

2. Écrire le résultat de l'application de L_- aux trois vecteurs de base.

$$\begin{aligned} L_-|+1\rangle &= \\ L_-|0\rangle &= \\ L_-|-1\rangle &= \end{aligned}$$

Le système possède un hamiltonien $H = (\omega_0/\hbar)(L_u^2 + L_v^2)$ où $L_u = \vec{L} \cdot \vec{u}$ et $L_v = \vec{L} \cdot \vec{v}$ sont les composantes de $\vec{L}$ sur deux directions $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan xOz à 45° de Ox et Oz, c'est-à-dire :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

3. Écrire l'expression de L_u et L_v en fonction des composantes L_x, L_y et L_z.

4. En déduire l'expression du hamiltonien en fonction de ces mêmes composantes.

5. Écrire la matrice représentant H dans la base $(|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle)$.

6. Déterminer les états stationnaires $(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle)$ et les énergies du systèmes (E_1, E_2, E_3) rangées dans l'ordre décroissant.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le système est dans l'état :

$$\psi(0) = \frac{|+1\rangle - |-1\rangle}{\sqrt{2}}$$

7. Trouver le vecteur d'état à un instant t quelconque.

8. À l'instant t, on mesure L_z. Quelles sont les valeurs que l'on peut obtenir et les probabilités correspondantes ?

9. Même question si on mesure L_z^2 au lieu de L_z. Quel est l'état du système juste après la mesure ?

Exercice : Effet Zeeman de l'atome d'hydrogène

On considère un électron dans le champ d'un proton supposé fixé à l'origine des coordonnées.

1. Écrire le hamiltonien H_0 de ce système en unités atomiques.

2. Donner les valeurs propres de H_0, $\mathbf{L}^2$ et L_z correspondant à la fonction propre $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)$, en précisant les valeurs possibles de n, ℓ et m.

Le système est placé dans un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e_z}$ uniforme. On admettra qu'il faut ajouter le terme $-\mu B L_z$ au hamiltonien pour tenir compte de ce champ (μ est une constante positive).

3. Montrer que $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)$ est toujours fonction propre de H et donner l'énergie correspondante.

On considère l'absorption de photons non polarisés correspondant à la transition entre les états $|n = 1\rangle$ et $|n = 3, l = 0\rangle$. cette absorption n'a lieu que si ℓ varie de ± 1 et m varie de 1, 0 ou -1.

4. Pour combien de longueurs d'onde va-t-on observer une absorption quand $B = 0$?

5. Même question pour $B \neq 0$.